TECHNIQUES & MÉTHODES S02

NB : cette fiche reprend les techniques nécessaires **minimales** ; elle ne constitue donc pas un objectif, mais un prérequis !

NOMBRES COMPLEXES

■■■ Notations algébriques & exponentielles

Un nombre complexe peut être présenté sous forme algébrique ou exponentielle. Je passe sans problème d'une écriture à l'autre :

Comment passer d'une notation algébrique en notation exponentielle

$\boxed{1}$ je détermine le module $\rho = |z|$ de z.

$\boxed{2}$ le nombre complexe z/ρ est un nombre complexe de module 1. Il s'écrit donc $\dfrac{z}{\rho} = \cos\theta + i\sin\theta$. Je reconnais θ.

Comment passer d'une notation exponentielle à une notation algébrique

J'utilise la formule $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, de sorte que $\rho e^{i\theta} = \rho\cos(\theta) + i\rho\sin(\theta)$

Exercice 4 : mettre sous forme exponentielle $z = \dfrac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1-i)^3}$ *réponse :* $z = 8\sqrt{2}e^{-11i\pi/12}$

■■■ Application des nombres complexes à la trigonométrie

Il y a deux points de vue, vous pouvez au choix, effectuer vos calculs dans **C** en utilisant **les formules d' Euler, Moivre et de Newton**, ou bien rester dans **R** et utiliser les formules de trigonométrie. Plus précisément

Linéarisation

Pour transformer un polynôme en cos et sin, vous pouvez utiliser les **formules de linéarisation**, ou bien

- exprimer $\sin\theta$ ou $\cos\theta$ avec les **formules d'Euler.**
- appliquer la **formule du binôme de Newton** pour obtenir l'expression de $\cos^n\theta$ ou de $\sin^n\theta$ comme une somme de puissances de $e^{i\theta}$.
- regrouper ces puissances deux à deux pour en faire des sin ou des cos.

Opération inverse de la linéarisation

Pour exprimer $\cos(p\theta)$ ou $\sin(p\theta)$ comme un poynôme en $\cos\theta$ et $\sin\theta$, vous pouvez utiliser les **formules d'addition et de duplication**, ou bien

- écrire $\cos n\theta = \mathfrak{Re}\, e^{in\theta} = \mathfrak{Re}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n$ ou que $\sin n\theta = \mathfrak{Im}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n$
- appliquer la **formule du binôme de Newton** pour obtenir l'expression de $\cos n\theta$ ou de $\sin n\theta$ en fonction des puissances de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$.

Exercice 5 : Exprimer $\sin(3x)$ sous la forme $\sin(x)\,P(\cos x)$, où P est un polynôme de degré 2.

Exercice 6 : Soit $x \in \mathbf{R}$, $x \not\equiv 0\ [2\pi]$. Montre que $\sum_{k=0}^{n}\sin(kx) = \dfrac{\sin((n+1)x/2)\ \sin(nx/2)}{\sin(x/2)}$.

■■■ Racines $n^{\text{ièmes}}$

Comment déterminer les racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1

- je connais parfaitement les racines carrées, cubiques et quatrièmes de 1.

$$\mathbf{U}_2 = \{1, -1\} \quad \mathbf{U}_3 = \{1, j, j^2\} \quad \mathbf{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$$

- pour $n \geq 5$j'explicite $\omega_n = e^{i2\pi/n}$. Les n racines $n^{\text{ièmes}}$ distinctes de 1 sont $1, \omega_n, \omega_n^2, \omega_n^3, \omega_n^4, \ldots \omega_n^{n-1}$. Avec les notations du cours :

$$\mathbf{U}_n = \{1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}\}.$$

Comment déterminer les racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe non nul a

$\boxed{1}$ je détermine l'expression exponentielle de a : $a = |a|e^{i\arg a}$

$\boxed{2}$ je détermine les racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1, c'est-à-dire $\omega_n = e^{i2\pi/n}$ et les puissances de ω_n.

$\boxed{3}$ je détermine une racine $n^{\text{ième}}$ ζ_0 particulière de a. Le plus simple $\zeta_0 = \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\,\frac{\arg a}{n}}$

$\boxed{4}$ je multiplie ζ_0 par les racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1. Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de a sont : $\mathbf{U}_n = \{\zeta_0, \zeta_0\omega_n, \zeta_0\omega_n^2, \ldots, \zeta_0\omega_n^{n-1}\}$.

Comment calculer les racines carrées en notation algébrique

Soit $a = \alpha + i\beta$ un nombre complexe non nul présenté sous forme algébrique. Je cherche les 2 racines carrées **opposées** de a sous forme algébrique : $z = x + iy$. (x, y) sont les solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 & = & \alpha \\ x^2 + y^2 & = & \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ 2xy & = & \beta \end{array}\right. .$$

Exercice 7 : Quelles sont les racines carrées de $5 + 12i$? *réponse :* $\S = \{3 + 2i, -3 - 2i\}$

■■■ Résolution d'équations polynomiales

D'après le **Théorème fondamental de l'algèbre**, toute équation polynomiale de degré $n \in \mathbf{N}^\star$ à coefficients complexes possède des solutions dans $\mathbf{C}$.

Equations polynomiales de degré 2

- je vérifie s'il n'y a pas de racine évidente : je teste quelques valeurs simples, et je me rappelle que les solutions z_1 et z_2 de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont les solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{c} z_1 + z_2 = -b/a \\ z_1 \times z_2 = c/a \end{array}\right.$$

- sinon, j'utilise le discriminant.Je calcule une racine carrée δ de Δ, en notation algébrique le plus souvent. Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont alors données par :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$$

Exercice 8 : résoudre $z^2 + (1 + 4i)z - 5 - i = 0$ *réponse :* $\S = \{1 - i, -2 - 3i\}$

Equations polynomiales de degré supérieur à 3

Aucune méthode nouvelle ne doit être connue. Le principe général est de se ramener à une équation de degré inférieur. Pour cela :

- je cherche une solution évidente,
- je chercheune solution particulière en suivant les indications de l'énoncé,
- j'effectue un changement d'inconnue.

Equations polynomiales de degré quelconque n

Lorsque le degré de l'équation n'est pas explicite, il y a fort à parier que celle-ci se ramène après changement de variable à une équation liée aux racines $n^{\text{ièmes}}$, par exemple

$$w^n = 1 \text{ ou } 1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = 0.$$